GLOBAL DERIVADAS **Junio 2004**

1.- Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de $f(x) = \dfrac{1}{2x}$

(1,5 puntos)

2.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones: (4 puntos)

a) $y = \sqrt{x^4 - 2x^3 - 8}$

b) $y = e^{-x} \cdot sen(2x)$

c) $y = tg(2x + 3) - \dfrac{1}{x}$

d) $y = \ln\left(\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right)$

3.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el puntos de abscisa x=1.

(1,5 puntos)

4.- Representa gráficamente la siguiente función, haciendo un estudio previo lo más completo posible: $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (3 puntos)

SOLUCIONES

1.- $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2(x+h)}-\dfrac{1}{2x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{x-(x+h)}{2x(x+h)}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{-h}{2x(x+h)}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h\cdot 2x(x+h)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{2x(x+h)}=\dfrac{-1}{2x\cdot x}=-\dfrac{1}{2x^2}$

2.- a) $y=\sqrt{x^4-2x^3-8}$ $\quad y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^4-2x^3-8}}\cdot\left(4x^3-6x^2\right)=\dfrac{2x^3-3x^2}{\sqrt{x^4-2x^3-8}}$

b) $y=e^{-x}\cdot sen(2x)$ $\quad y'=e^{-x}(-1)\cdot sen(2x)+e^{-x}\cdot\cos(2x)\cdot 2$

$y'=e^{-x}[-sen(2x)+2\cos(2x)]$

c) $y=tg(2x+3)-\dfrac{1}{x}$ $\quad y'=1+tg^2(2x+3)\cdot 2-\dfrac{-1}{x^2}=1+2tg^2(2x+3)+\dfrac{1}{x^2}$

d) $y=\ln\left(\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}\right)$ $\quad y'=\dfrac{1}{\dfrac{\cos x-1}{\cos x+1}}\cdot\dfrac{-sen\,x(\cos x+1)-(\cos x-1)(-sen\,x)}{(\cos x+1)^2}$

$y'=\dfrac{-sen\,x\cdot\cos x-sen\,x+\cos x\cdot senx-sen\,x}{\dfrac{(\cos x-1)(\cos x+1)^2}{\cos x+1}}=\dfrac{-2sen\,x}{(\cos x-1)(\cos x+1)}=\dfrac{-2sen\,x}{\cos^2 x-1}$

$y'=\dfrac{-2sen\,x}{-sen^2x}=\dfrac{2}{sen\,x}$

3.- $y=\ln x$ recta tangente en x=1

ecuación de la recta tangente: $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

$x_0=1\Rightarrow y_0=f(1)=\ln 1=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{1}{1}=1$ $\quad y-0=1(x-1)\Rightarrow y=x-1$ ecuación pedida

4.- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **Dominio:**

$x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$ Dominio $R-\{1,-1\}$ Continua en su dominio.

ASÍNTOTAS
Verticales:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}\left\langle\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty\end{array}\right. \Rightarrow x=1 \text{ asíntota vertical ramas divergentes}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}\left\langle\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty\end{array}\right. \Rightarrow x=-1 \text{ asíntota vertical ramas divergentes}$$

Horizontales:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow y=1 \text{ asíntota horizontal}$$

(probamos con 1000 y –1000 y vemos que la gráfica está por encima de la asíntota a derecha e izquierda)

Crecimiento, máximos y mínimos: $y'=\dfrac{2x(x^2-1)-(x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

Igualamos a cero y tenemos: $-4x=0\Rightarrow x=0$ posible extremo

Sg(f')	+		+		-		-
	creciente	-1	creciente	0	decreciente	1	decreciente
f es		A.V.	creciente	Máx.		A.V.	decreciente

Tenemos un máximo en (0,-1)

Puntos de corte con los ejes:

Eje OY: $x=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{-1}=-1$

Eje OX: $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0\Rightarrow x^2+1=0$ no corta